Matematická analýza 1, příklady na procvičení (Josef Tkadlec, 29. 4. 2020)

1. Reálná čísla

1. Určete maximum, minimum, supremum a infimum následujících množin:

   a) $\mathbb{Z}$;

   b) $M = (-1, 1) \cup \langle 3, 5\rangle$;

   c) $M = \langle 0, \sqrt{2}\,\rangle \cap \mathbb{Q}$;

   d) $M = \{1 + 2^{-n} \colon n \in \mathbb{N}\}$;

   e) $M = \langle 0, \frac{1}{3}\rangle \cap \{2^{-n} \colon n \in \mathbb{N}\}$;

   f) $M = \left\{(-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$.

Výsledky

1. a) $\max \mathbb{Z}$ ani $\min \mathbb{Z}$ neexistují, $\sup \mathbb{Z} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$;

   b) $\max M = 5 = \sup M$, $\min M$ neexistuje, $\inf M = -1$;

   c) $\max M$ neexistuje, $\sup M = \sqrt{2}$, $\min M = 0 = \inf M$;

   d) $\max M = \frac{3}{2} = \sup M$, $\min M$ neexistuje, $\inf M = 1$;

   e) $\max M = \frac{1}{4} = \sup M$, $\min M$ neexistuje, $\inf M = 0$;

   f) $\max M$ ani $\min M$ neexistují, $\sup M = 1$, $\inf M = -1$.

2. Funkce

1. Určete definiční obor funkce:

a) $\dfrac{x^2}{x+1}$; b) $\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$; c) $\sqrt{2+x-x^2}$;

d) $\sqrt{3x-x^3}$; e) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; f) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x}$;

g) $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; h) $\sqrt{1-|x|}$; i) $\log_2\log_3\log_4 x$;

j) $\dfrac{\ln(x+1)}{2^x-1}$; k) $\ln|\sin x|$; l) $\arcsin\sqrt{\dfrac{2x+1}{2}}$;

m) $\big(\operatorname{arctg}(x-1)\big)^{1/(x-3)}$; n) $\log\big(1-\log(x^2-4x+13)\big)$.

2. Vyšetřete omezenost funkce:

a) $\dfrac{3}{x-2}$; b) x^2+6x-4; c) $-2x^2+x+5$; d) $\dfrac{1}{x^2+1}$.

3. Určete, zda je funkce sudá nebo lichá:

a) $5x-x^3$; b) x^4+3x^2-1; c) x^2+3x-2;

d) 2^x-2^{-x}; e) $\ln\dfrac{1-x}{1+x}$; f) $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$;

g) $\log(\sqrt{x^2+1}+x)$; h) $\dfrac{\sin x}{x}$; i) 2^{-x^2};

j) $\sin x-\cos x$; k) $\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$.

4. Vyšetřete, zda je funkce periodická, a pokud ano, určete její periodu:

a) $\sin 3x$; b) $5\cos 2x$; c) $4\sin\pi x$;

d) $-3\cos(4x+5)$; e) $\sqrt{\operatorname{tg} x}$; f) $\operatorname{tg}\sqrt{x}$;

g) $2\sin 3x+3\sin 2x$; h) $\sin(5\pi x+\frac{\pi}{4})-\cos(\frac{\pi}{6}-3\pi x)$.

5. Dokažte (rozšiřující):

a) $\sinh(x+y)=\sinh x\,\cosh y+\cosh x\,\sinh y$;

b) $\cosh(x+y)=\cosh x\,\cosh y+\sinh x\,\sinh y$.

Výsledky

1. a) $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$; b) $(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,+\infty)$; c) $\langle -1,2\rangle$; d) $(-\infty,-\sqrt{3}\,\rangle\cup\langle 0,\sqrt{3}\,\rangle$; e) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$; f) $(-\infty,-1\rangle\cup\{1\}$; g) $\emptyset$; h) $\langle -1,1\rangle$; i) $(4,+\infty)$; j) $(-1,0)\cup(0,+\infty)$; k) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi,(k+1)\pi)$; l) $\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$; m) $(1,3)\cup(3,+\infty)$ (přepis funkce na $\exp(-\frac{1}{x}\ln\operatorname{arctg}(x+1))$); n) $(1,3)$.

2. a) není omezená ani zdola, ani shora; b) omezená zdola; c) omezená shora; d) omezená.

3. (Řešení rovnic $f(-x)=f(x)$ a $f(-x)=-f(x)$.) a) lichá; b) sudá; c) ani sudá ani lichá; d) lichá; e) lichá; f) lichá; g) lichá; h) sudá; i) sudá; j) ani sudá ani lichá; k) sudá.

4. a) $\frac{2}{3}\pi$; b) π; c) 2; d) $\frac{1}{2}\pi$; e) π; f) není periodická; g) 2π (společný násobek period sčítanců: $\frac{2\pi}{3}$ a π); h) 2 (společný násobek period sčítanců: $\frac{2}{5}$ a $\frac{2}{3}$).

3. Limity funkcí

1. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x-1}{x^3+3}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-1}{x^4+1}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-2x+1}{2x^2+3x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3-2x+5}{x^3+x^2+1}$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x}{x^2+1}$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3+x^2+1}{x^2+x+3}$;

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5+x^3+2}{2x^3-1}$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^5}{1+x^2}$.

2. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+2x-1}{x^2+2x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$; c) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$;

d) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x-4}{x^2-4x+3}$; e) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+2}{x^2+2x+1}$; f) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

3. Spočtěte (rozšiřující):

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}+2}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-4}-2}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{4x^2-2}+1}$.

4. Spočtěte (rozšiřující):

a) $\lim\limits_{x\to6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$; b) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

5. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$; b) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\cos 2x}{1-\sin x}$; c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x+\cos x)$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\cos(3x+1)$.

6. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{2x^2+3x-5}$; b) $\lim\limits_{x\to1} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; c) $\lim\limits_{x\to0} \sin\dfrac{1}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\dfrac{1}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to\pi} \ln^2(1+\cos x)$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{1/x}$;

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$; h) $\lim\limits_{x\to2} \sqrt[x-2]{x}$.

7. Spočtěte limity funkce v hraničních bodech definičního oboru:

a) $\dfrac{\cos x}{2^x-1}$; b) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; c) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1/(x-3)}$.

Výsledky

1. (Vytýkání největších mocnin v čitateli a jmenovateli a jejich krácení.) a) 0; b) 0; c) 2; d) 3; e) $+\infty$; f) $-\infty$; g) $+\infty$; h) $+\infty$.

2. (Vytýkání kořenových činitelů v čitateli a jmenovateli a jejich krácení.) a) $\frac{2}{3}$; b) 0; c) 3 ($\sqrt{x^2} = |x| = -x$ v okolí $-\infty$); d) neexistuje, $\mp\infty$ v $3\pm$; e) $+\infty$; f) $-\frac{1}{2}$ (po sečtení zlomků).

3. (Vytýkání vhodných mocnin x v čitatele a jmenovateli a jejich krácení.) a) $+\infty$; b) 3; c) -1.

4. a) $\frac{1}{4}$ (rozšířit $\sqrt{x-2}+2$); b) 2 (rozšířit $\sqrt{x+2}+1$); c) 1 (rozšířit $\sqrt{x^2+2x}+x$).

5. a) 1 (zkrátit x, $|\frac{\text{omez.}}{\infty}| = 0$); b) $-\infty$ ($|\frac{-1}{0+}| = -\infty$); c) nelze počítat (def. obor je $(-1,1)$), $+\infty$ v $1-$ ($|\frac{1}{0+}| = +\infty$); d) 0 ($|\frac{\text{omez.}}{\infty}| = 0$); e) $+\infty$ ($|+\infty + \text{omez.}| = +\infty$); f) 0 ($|0 \cdot \text{omez.}| = 0$).

6. a) $+\infty$; b) nelze počítat, $+\infty$ v $1+$; c) neexistuje; d) 1; e) $+\infty$; f) $+\infty$; g) $-\frac{1}{2}\pi$; h) neexistuje, 0 v $2-$, $+\infty$ v $2+$ (přepis funkce na $\exp(\frac{1}{x-2} \cdot \ln x)$).

7. a) neexistuje v $-\infty$, $\pm\infty$ v $0\pm$, 0 v $+\infty$;

   b) $-\frac{1}{4}\pi$ v $\pm\infty$, $\mp\frac{1}{2}\pi$ v $1\pm$;

   c) 1 v $\pm\infty$, $+\infty$ v $-1-$ a v $3+$, 0 v $1+$ a v $3-$ (přepis funkce na $\exp(\frac{1}{x-3} \cdot \ln \frac{x+1}{x-1})$).

4. Derivace funkce

1. Spočtěte derivaci funkce:

   a) $3x^2 - 5x + 1$; b) $2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \dfrac{2}{x^3}$;

   d) $2\,\mathrm{e}^{3x} + 4\,\mathrm{e}^{-2x}$; e) $3\sin 2x - 5\cos 3x$; f) $\sinh x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

2. Spočtěte derivaci funkce:

   a) $(3x^2 - 5x + 1)\,\mathrm{e}^{2x}$; b) $\sqrt[4]{x}\cos x$; c) $\mathrm{e}^x \sin 3x$;

   d) $x^2\,\mathrm{e}^x \cos x$; e) $x \cdot \sin x \cdot \operatorname{arctg} x$; f) $\dfrac{x}{x^3+1}$;

   g) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sin x}$; h) $\operatorname{tg} x$; i) $\operatorname{cotg} x$.

3. Spočtěte derivaci funkce

   a) $\sin(2x+5)$; b) e^{-3x+1} ; c) $(x^2+1)^4$;

   d) $\sqrt{x^3+1}$; e) $\ln^2 x$; f) $\ln \operatorname{tg} x$;

   g) $\sin \ln(x^3+1)$; h) $\sqrt{\ln^2 x + 1}$; i) $\ln \ln \sin x$.

4. Spočtěte derivaci funkce:

   a) 10^x ; b) x^x ; c) $x^{\sin x}$;

   d) x^{x^2} ; e) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$; f) $(x^2+1)^{\cos \pi x}$.

5. Spočtěte derivaci druhého řádu:

   a) $x\,\mathrm{e}^{x^2}$; b) $(x^2+1)\operatorname{arctg} x$; c) $\ln(x + \sqrt{x^2+1}\,)$.

6. Vyjádřete derivaci řádu n (teorie):

   a) e^{ax} ; b) $x\,\mathrm{e}^x$; c) $x \ln x$.

7. Podle definice spočtěte derivaci funkce $\frac{1}{x}$ (teorie).

8. Odvoďte derivaci funkce $\arcsin x$ (teorie).

Výsledky

(Na definičním oboru kromě uvedených výjimek.)

1. (tabulkové derivace, linearita) a) $6x - 5$; b) $x^{-1/2} + x^{-2}$; c) $-\frac{3}{5}\,x^{-8/5} - 6x^{-4}$; d) $6\,\mathrm{e}^{3x} - 8\,\mathrm{e}^{-2x}$; e) $6\cos 2x + 15\sin 3x$; f) $\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x$.

2. (derivace součinu, podílu) a) $(6x^2 - 4x - 3)\,\mathrm{e}^{2x}$; b) $\frac{1}{4}\,x^{-3/4}\cos x - \sqrt[4]{x}\sin x$, $x \neq 0$; c) $\mathrm{e}^x(\sin 3x + 3\cos 3x)$; d) $\mathrm{e}^x\big((2x + x^2)\cos x - x^2\sin x\big)$; e) $\sin x \operatorname{arctg} x + x\cos x \operatorname{arctg} x + \frac{x\sin x}{x^2+1}$; f) $\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}$; g) $\frac{\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$; h) $\frac{1}{\cos^2 x}$; i) $-\frac{1}{\sin^2 x}$.

3. (derivace složené funkce) a) $2\cos(2x + 5)$; b) $-3\,\mathrm{e}^{-3x+1}$; c) $8x(x^2 + 1)^3$; d) $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$, $x \neq -1$; e) $\frac{2}{x}\ln x$; f) $\frac{1}{\sin x\,\cos x}$; g) $\cos\ln(x^3 + 1)\cdot\frac{3x^2}{x^3+1}$; h) $\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}$; i) funkce není definována pro žádné x.

4. $\big(f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)}\big)$ a) $10^x\ln 10$; b) $x^x(\ln x + 1)$; c) $x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$; d) $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$; e) $\big(\frac{x}{x+1}\big)^x\big(\frac{1}{x+1}+\ln\frac{x}{x+1}\big)$; f) $(x^2+1)^{\cos\pi x}\big(-\pi\sin\pi x\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2x\cos\pi x}{x^2+1}\big)$.

5. a) $2\,\mathrm{e}^{x^2}(2x^3 + 3x)$; b) $\frac{2x}{x^2+1} + 2\operatorname{arctg} x$; c) $\frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

6. a) $a^n\,\mathrm{e}^{ax}$; b) $\mathrm{e}^x(x + n)$; c) $\ln x + 1$ pro $n = 1$, $(-1)^n\,(n-2)!\,x^{1-n}$ pro $n \geq 2$.

7. $\big(\frac{1}{x}\big)' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

8. $\arcsin x$ je inverzní k $\sin y$, ta je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ spojitá, ryze mnonotonní (rostoucí), má na něm nenulovou derivaci $\cos y$ a zobrazuje tento interval na $(-1, 1)$, takže podle věty o derivaci inverzní funkce pro každé $x \in (-1, 1)$ je $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Aplikace derivací

1. Spočtěte

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\ln x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x}{x-1}$;

   e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$; g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x+2}$; h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{5x+3}$;

   i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$; j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; k) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

2. Spočtěte:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-2x^2}{\mathrm{e}^x}$; c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x^2-8)}{x^2-3x}$;

   d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x^2-8)}{x^2-3x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 3x}$.

3. Spočtěte:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cotg} x$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\pi-2\operatorname{arctg} x)$; c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^a\ln x \quad (a>0)$.

4. Spočtěte:

   a) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$; b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[x]{x}$.

5. Spočtěte (rozšiřující):

   a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0+}(\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{\dfrac{\sin x}{x}}$.

6. Určete rovnice tečny a normály grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$:

   a) $f(x)=\ln x, \quad a=1$; b) $f(x)=2x^2-1, \quad a=\frac{1}{2}$.

7. Určete rovnice tečny a normály grafu x^2 se směrnicemi 2 (aplikace teorie).

8. Určete rovnici tečny grafu x^2 bodem $[2,3]$ (aplikace teorie).

9. Určete Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě a:

   a) $f(x)=x^2-1, \quad a=2,\ n=3$; b) $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-2x}, \quad a=0,\ n=3$;

   c) $f(x)=\mathrm{e}^{2x}\cos x, \quad a=0,\ n=3$; d) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}, \quad a=0,\ n=3$;

   e) $f(x)=\operatorname{arctg} x, \quad a=0,\ n=3$; f) $f(x)=\ln(1+x), \quad a=0,\ n=4$.

Výsledky

1. (l'Hospitalovo pravidlo) a) $\frac{3}{4}$; b) $-\pi$; c) 2; d) 0; e) neexistuje, $\pm\infty$ v $1\pm$; f) $\frac{2}{3}$; g) 0; h) $+\infty$; i) 0; j) $\frac{1}{3}$; k) 0.

2. (l'Hospitalovo pravidlo opakovaně) a) $\frac{1}{2}$; b) 0; c) 2; d) 0; e) nelze počítat, 1 v $0+$ (před druhým použitím vytknout limitu podílu kosinů).

3. (upravit na podíl a použít l'Hospitalovo pravidlo) a) 1 $(\frac{x}{\operatorname{tg} x})$; b) 2 $(\frac{\pi - 2\arctan x}{1/x})$; c) 0 $(\frac{\ln x}{x^{-a}})$.

4. $(f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\cdot \ln f(x))$, v exponentu upravit na podíl a l'Hospitalovo pravidlo) a) 1 $(\frac{\ln x}{1/x})$; b) $\frac{1}{\mathrm{e}}$ $(\frac{\ln x}{1-x})$; c) 1 $(\frac{\ln x}{x})$.

5. a) $\mathrm{e}^{-1/2}$; b) 1. c) $\mathrm{e}^{-1/6}$.

6. a) tečna: $y = x - 1$, normála: $y = -x + 1$;

   b) tečna: $y = 2x - \frac{3}{2}$, normála: $y = -\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}$.

7. tečna: $y = 2x - 1$, normála: $y = 2x + \frac{9}{16}$ (určí se bod $[a, f(a)]$ grafu f vyřešením rovnice: směrnice tečny $f'(a) = 2$, směrnice normály $-\frac{1}{f'(a)} = 2$)

8. $y = 2x - 1$, $y = 6x - 9$ (určí se bod $[a, f(a)]$ grafu f z rovnice tečny $y = f(a) + f'(a)\,(x-a)$ po dosazení bodu $[x, y] = [2, 3]$)

9. a) $3 + 4(x-2) + (x-2)^2$;

   b) $x - 2x^2 + 2x^3$;

   c) $1 + 2x + \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3$;

   d) $1 + x + x^2 + x^3$;

   e) $x - \frac{1}{3}\,x^3$;

   f) $x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4$;

6. Průběh funkce

1. Vyšetřete monotonii a lokální extrémy funkce:

   a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$; b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$;

   d) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$; e) $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$; f) $f(x) = x\ln x$;

   g) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$; h) $f(x) = x - \sin x$; i) $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$;

   j) $f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{-|x|}$; k) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$; l) $f(x) = (x-1)\,|x+3|$.

2. Určete maximum a minimum funkce:

   a) $f(x) = x^3 - 12x + 4$, $x \in \langle -3, 3\rangle$; b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$, $x \in \langle -2, 1\rangle$;

   c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $x \in \langle -1, 3\rangle$; d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $x \in \langle -2, 3\rangle$;

   e) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, +\infty)$; f) $f(x) = x\ln^2 x$, $x \in (0, 1\rangle$;

   g) $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$; h) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$, $x \in (0, +\infty)$;

   i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, $x \in (-1, 1)$; j) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

3. Určete intervaly konvexity a konkavity a body inflexe funkce:

   a) $2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$; b) $x^5 - 10x^2 + x + 3$; c) $x^4 + x^2 + \mathrm{e}^x$;

   d) $x\,\mathrm{e}^x$; e) $(x^2+1)\,\mathrm{e}^x$; f) $x + \sin x$;

   g) $\dfrac{x}{x^2+1}$; h) $\dfrac{|x-1|}{x^2}$; i) $\sqrt[3]{x+3}$.

4. Určete asymptoty grafu funkce:

   a) $\dfrac{2x+1}{3x-1}$; b) $\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$; c) $\dfrac{x^2-2x}{x+1}$; d) $\dfrac{x^3+1}{x-1}$;

   e) $x + \mathrm{e}^{-x}$; f) $x\ln x$; g) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$; h) $\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

   i) $\mathrm{e}^x\cos x$; j) $\ln(3\,\mathrm{e}^{2x} - 1)$ (rozšiřující).

5. (aplikace teorie)

   a) Určete rozměry pravoúhelníku s největším obsahem vepsaného do půlkruhu o poloměru r.

   b) Určete rozměry kvádru se čtvercovou podstavou, který má při objemu V nejmenší povrch.

   c) Určete rozměry válce s největším objemem vepsaného do koule o poloměru r.

   d) Určete rozměry válce s největším obsahem pláště vepsaného do koule o poloměru r.

Výsledky

1. a) na $(-\infty,-5)$ a $(-5,+\infty)$ rostoucí, lokální extrémy nemá; b) na $(-\infty,-1\rangle$ a $\langle 1,+\infty)$ rostoucí, na $\langle -1,0)$ a $(0,1\rangle$ klesající, $f(-1)=-2$ ostré lokální maximum, $f(1)=2$ ostré lokální minimum; c) na $(-\infty,-1\rangle$ a $\langle 1,+\infty)$ klesající, na $\langle -1,1\rangle$ rostoucí, $f(-1)=-\frac{1}{2}$ ostré lokální minimum, $f(1)=\frac{1}{2}$ ostré lokální maximum; d) na $(-\infty,-2\rangle$ a $\langle 0,+\infty)$ rostoucí, na $\langle -2,0\rangle$ klesající, $f(-2)=4\mathrm{e}^{-2}$ ostré lokální maximum, $f(0)=0$ ostré lokální minimum; e) na $(0,1\rangle$ klesající, na $\langle 1,+\infty)$ rostoucí, $f(1)=1$ ostré lokální minimum; f) na $(0,\mathrm{e}^{-1}\rangle$ klesající, na $\langle \mathrm{e}^{-1},+\infty)$ rostoucí, $f(\mathrm{e}^{-1})=-\mathrm{e}^{-1}$ ostré lokální minimum; g) na $(-1,1)$ rostoucí, lokální extrémy nemá; h) na $\mathbb{R}$ rostoucí, lokální extrémy nemá; i) na $(-\infty,0\rangle$ rostoucí, na $\langle 0,+\infty)$ klesající, $f(0)=1$ ostré lokální maximum; j) na $(-\infty,-3\rangle$ a $\langle 3,+\infty)$ klesající, na $\langle -3,3\rangle$ rostoucí, $f(-3)=-27\,\mathrm{e}^{-3}$ ostré lokální minimum, $f(3)=27\,\mathrm{e}^{-3}$ ostré lokální maximum; k) na $(-\infty,0\rangle$ rostoucí, na $\langle 0,+\infty)$ klesající, $f(0)=1$ ostré lokální maximum; l) na $(-\infty,-3\rangle$ a $\langle -1,+\infty)$ rostoucí, na $\langle -3,-1)$ klesající, $f(-3)=0$ ostré lokální maximum, $f(-1)=-4$ ostré lokální minimum.

2. a) $\max f=f(-2)=20$, $\min f=f(2)=-12$; b) $\max f=f(1)=6$, $\min f=f(-2)= =-3$; c) $\max f=f(3)=12$, $\min f=f(2)=-13$; d) $\max f=f(0)=f(3)=2$, $\min f=f(-2)=-18$; e) $\max f=f(1)=\frac{\pi}{4}$, $\min f$ neexistuje; f) $\max f= =f(\mathrm{e}^{-2})=4\mathrm{e}^{-2}$, $\min f=f(1)=0$; g) $\max f$ neexistuje, $\min f=f(0)=1$; h) $\max f=f(1)=\mathrm{e}^{-1}$, $\min f$ neexistuje; i) $\max f$ neexistuje, $\min f$ neexistuje; j) $\max f=f(1)=\frac{1}{2}$, $\min f=f(-1)=-\frac{1}{2}$.

3. a) na $(-\infty,-\frac{1}{2}\rangle$ a $\langle \frac{1}{2},+\infty)$ konvexní, na $\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ konkávní, inflexe v $-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$; b) na $(-\infty,1\rangle$ konkávní, na $\langle 1,+\infty)$ konvexní, inflexe v 1; c) na $\mathbb{R}$ konvexní, body inflexe nemá; d) na $(-\infty,-2\rangle$ konkávní, na $\langle -2,+\infty)$ konvexní, inflexe v -2; e) na $(-\infty,-3\rangle$ a $\langle -1,+\infty)$ konvexní, na $\langle -3,-1\rangle$ konkávní, inflexe v -3 a -1; f) na $\langle 0+2k\pi,\pi+2k\pi\rangle$ $(k\in\mathbb{Z})$ konkávní, na $\langle \pi+2k\pi,2\pi+2k\pi\rangle$ $(k\in\mathbb{Z})$ konvexní, inflexe v $k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$; g) na $(-\infty,-\sqrt{3}\,\rangle$ a $\langle 0,\sqrt{3}\,\rangle$ konkávní, na $\langle -\sqrt{3},0\rangle$ a $\langle\sqrt{3},+\infty)$ konvexní, inflexe v $\pm\sqrt{3}$ a 0; h) na $(-\infty,0)$, $(0,1\rangle$ a $\langle 3,+\infty)$ konvexní, na $\langle 1,3\rangle$ konkávní, inflexe v 3; i) na $(-\infty,-3\rangle$ konvexní, na $\langle -3,+\infty)$ konkávní, inflexe v -3.

4. a) $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$ v $\pm\infty$; b) $x=-2$, $y=0$ v $\pm\infty$; c) $x=-1$, $y=x-3$ v $\pm\infty$; d) $x=1$; e) $y=x$ v $+\infty$; f) nemá; g) $y=\frac{\pi}{4}$ v $\pm\infty$; h) $x=\pm 1$; i) $y=0$ v $-\infty$; j) $x=-\frac{1}{2}\ln 3$, $y=2x+\ln 3$ v $+\infty$ (ve druhé limitě se rozdíl logaritmů vyjádří jako logaritmus podílu).

5. a) strany $\sqrt{2}\,r$ a $\frac{\sqrt{2}}{2}\,r$, obsah r^2 (strany délek a [na průměru], b, z Pythagorovy věty $(a/2)^2+b^2=r^2$, maximum obsahu $P(a)=ab=a\sqrt{r^2-(a/2)^2}$ na $(0,2r)$);

   b) krychle s hranami $\sqrt[3]{V}$, obsah povrchu $6\sqrt[3]{V^2}$ (hrany délek a [podstava], b, objem $V=a^2b$, tj. $b=V/a^2$, obsah povrchu $S(a)=2a^2+4ab=2a^2+4V/a$ na $(0,+\infty)$);

   c) poloměr podstavy $\sqrt{2/3}\,r$, výška $\sqrt{4/3}\,r$, objem $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\,r^3$ (osa válce středem koule, poloměr podstavy ϱ, výška v, z Pythagorovy v rovině osou válce $\varrho^2+(v/2)^2=r^2$, objem $V(v)=\pi\varrho^2 v=\pi(r^2-(v/2)^2)v$ na $(0,2r)$);

   d) poloměr podstavy $\frac{\sqrt{2}}{2}\,r$, výška $\sqrt{2}\,r$, obsah pláště $2\pi r^2$ (osa válce středem koule, poloměr podstavy ϱ, výška v, z Pythagorovy v rovině osou válce $\varrho^2+(v/2)^2=r^2$, obsah $S(\varrho)= =2\pi\varrho v=4\pi\varrho\sqrt{r^2-\varrho^2}$ na $(0,r)$);

7. Neurčitý integrál

1. Spočtěte:

a) $\int (x^3 - 2x^2 - 3)\,\mathrm{d}x$; b) $\int \frac{x^3 - x + 4}{x^2}\,\mathrm{d}x$; c) $\int \frac{2x-5}{x^5}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int \sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x$; e) $\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x$; f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$;

g) $\int (3\,\mathrm{e}^{2x} + 4\sin 3x)\,\mathrm{d}x$; h) $\int 2\cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$; i) $\int 5^x\,\mathrm{d}x$;

j) $\int \frac{2x^2+5}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; k) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$; l) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

2. Spočtěte:

a) $\int (x-2)\sin 2x\,\mathrm{d}x$; b) $\int (x+1)\cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$; c) $\int (3x-1)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int (x+\sqrt{x}\,)\ln x\,\mathrm{d}x$; e) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$; f) $\int (x^2-x)\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$;

g) $\int (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; h) $\int \sqrt[3]{x}\ln 2x\,\mathrm{d}x$.

3. Spočtěte (teorie):

a) $\int \mathrm{e}^{2x}\cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$; b) $\int \mathrm{e}^{-x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$; c) $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

4. Spočtěte:

a) $\int (3x-4)^6\,\mathrm{d}x$; b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x-1}$; c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^5}$;

d) $\int \sqrt[3]{2-x}\,\mathrm{d}x$.

5. Spočtěte:

a) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$; b) $\int \sin^7 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$; c) $\int \sin x\cdot\cos^4 x\,\mathrm{d}x$;

d) $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$.

6. Spočtěte (rozšiřující):

a) $\int \frac{2x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$; b) $\int \operatorname{cotg} 2x\,\mathrm{d}x$; c) $\int 2x\,(x^2-1)^4\,\mathrm{d}x$;

d) $\int x\,\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; e) $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$; f) $\int 6x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$;

g) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}\,\mathrm{d}x$; h) $\int \frac{4x+4}{\sqrt[3]{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$.

Výsledky

1. (tabulkové integrály a linearita) a) $\frac{1}{4}\,x^4-\frac{2}{3}\,x^3-3x+c,\ x\in\mathbb{R}$; b) $\frac{1}{2}\,x^2-\ln|x|-\frac{4}{x}+c,$ $x\in(-\infty,0),\ x\in(0,+\infty)$ (vydělit); c) $-\frac{2}{3x^3}+\frac{5}{4x^4}+c,\ x\in(-\infty,0),\ x\in(0,+\infty)$ (vydělit); d) $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}+c,\ x\in\langle 0,+\infty)$; e) $\frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8}+c,\ x\in\mathbb{R}$; f) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+c,$ $x\in(-\infty,0),\ x\in(0,+\infty)$; g) $\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{2x}-\frac{4}{3}\cos x+c,\ x\in\mathbb{R}$; h) $6\sin\frac{x}{3}+c,\ x\in\mathbb{R}$; i) $\frac{5^x}{\ln 5}+c,\ x\in\mathbb{R}$ (přepis funkce na $\mathrm{e}^{x\ln 5}$); j) $2x+3\,\mathrm{arctg}\,x+c,\ x\in\mathbb{R}$ (vydělit); k) $\frac{1}{2}\,(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+c,\ x\in\mathbb{R}$ (přepis funkce na $\frac{1}{2}\,(1-\cos 2x)$); l) $\frac{1}{2}\,(x+\frac{1}{2}\sin 2x)+c,$ $x\in\mathbb{R}$ (přepis funkce na $\frac{1}{2}\,(1+\cos 2x)$).

2. (per partes) a) $-\frac{1}{2}\,(x-2)\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+c,\ x\in\mathbb{R}$; b) $3(x+1)\sin\frac{x}{3}+9\cos\frac{x}{3}+c,$ $x\in\mathbb{R}$; c) $\frac{1}{3}\,(3x-2)\,\mathrm{e}^{3x}+c,\ x\in\mathbb{R}$; d) $(\frac{1}{2}\,x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,)\ln x-\frac{1}{4}\,x^2-\frac{4}{9}\sqrt{x^3}+c,\ x\in(0,+\infty)$; e) $-\frac{1}{x}\,(\ln x+1)+c,\ x\in(0,+\infty)$; f) $-2(x^2-x-8)\cos\frac{x}{2}+4(2x-1)\sin\frac{x}{2}+c,\ x\in\mathbb{R}$; g) $-(x^2+3x+4)\,\mathrm{e}^{-x}+c,\ x\in\mathbb{R}$; h) $\frac{3}{4}\,x\,\sqrt[3]{x}\,\ln 2x-\frac{9}{16}\,x\,\sqrt[3]{x}+c,\ x\in(0,+\infty)$.

3. (per partes a rovnice) a) $\frac{3}{37}\,(\sin\frac{x}{3}+6\cos\frac{x}{3})\,\mathrm{e}^{2x}+c,\ x\in\mathbb{R}$ (per partes $2\times$); b) $-\frac{1}{5}\,(\sin 2x+2\cos 2x)\,\mathrm{e}^{-x}+c,\ x\in\mathbb{R}$ (per partes $2\times$); c) $\frac{1}{2}\ln^2 x+c,\ x\in(0,+\infty)$.

4. (lineární substituce) a) $\frac{1}{21}\,(3x-4)^7+c,\ x\in\mathbb{R}$ $(3x-4=t)$; b) $\frac{1}{3}\ln|3x-1|+c,$ $x\in(-\infty,\frac{1}{3}),\ x\in(\frac{1}{3},+\infty)$ $(3x-1=t)$; c) $\frac{-1}{8(2x+1)^4}+c,\ x\in(-\infty,-\frac{1}{2}),\ x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ $(2x+1=t)$; d) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2-x)^4}+c,\ x\in\mathbb{R}$ $(2-x=t)$.

5. (vhodná substituce, bude později) a) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4)+c,\ x\in\mathbb{R}$ $(x^2+2x+4=t)$; b) $\frac{1}{8}\sin^8 x+c,\ x\in\mathbb{R}$ $(\sin x=t)$; c) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+c,\ x\in\mathbb{R}$ $(\cos x=t)$; d) $\frac{1}{4}\ln^4 x+c,$ $x\in(0,+\infty)$ $(\ln x=t)$.

6. (vhodná substituce, v případných krajních bodech limita derivace) a) $\frac{2}{3}\ln|x^3-1|+c,$ $x\in(-\infty,1),\ x\in(1,+\infty)$ $(x^3-1=t)$; b) $\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|+c,\ x\in(0+k\,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}),$ $k\in\mathbb{Z}$ (přepis funkce na $\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$, $\sin 2x=t$); c) $\frac{1}{5}\,(x^2-1)^5+c,\ x\in\mathbb{R}$ $(x^2-1=t)$; d) $\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2+1}+c,\ x\in\mathbb{R}$ $(\mathrm{e}^{x^2+1}=t)$; e) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+c,\ x\in\langle -1,1\rangle$ $(1-x^2=t)$; f) $\frac{4}{3}\sqrt{(x^3+1)^3}+c,\ x\in\langle -1,+\infty)$ $(x^3+1=t)$; g) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+8}+c,\ x\in(-2,+\infty)$ $(x^3+8=t)$; h) $3\sqrt[3]{(x^2+2x+2)^2}+c,\ x\in\mathbb{R}$ $(x^2+2x+2=t)$.

8. Integrace racionálních funkcí a dalších typů funkcí

1. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+5}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+3x+2)}\,\mathrm{d}x\,;$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2+7x+1}{(x-1)(x^2+x-2)}\,\mathrm{d}x\,;$ d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x^2+4x+4)}\,;$

e) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^4-x^3}\,\mathrm{d}x\,;$ f) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+11x^2-7x}{(x+1)^3(x^2-4x+4)}\,\mathrm{d}x\,;$

g) $\displaystyle\int \frac{-5}{(x+4)^4}\,\mathrm{d}x\,;$ h) $\displaystyle\int \frac{3}{(2x-1)^3}\,\mathrm{d}x\,.$

2. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int \frac{5x-2}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x\,;$ c) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+4x+13}\,\mathrm{d}x\,;$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x\,;$ e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-12x+13}\,;$ f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\,(x^2+1)}\,.$

3. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int \frac{3\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{2x}-2}\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int \frac{2}{\mathrm{e}^{3x}+2}\,\mathrm{d}x\,;$ c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{4x}-2\,\mathrm{e}^{2x}+2}\,\mathrm{d}x\,;$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}\,;$ e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\,(\ln^2 x-4)}\,\mathrm{d}x\,;$ f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln 3x}\,.$

4. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int \sin^6 x\cdot\cos^3 x\;\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int \sin^3 x\cdot\cos^5 x\;\mathrm{d}x\,;$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos^2 x-\sin x+1}\,\mathrm{d}x\,;$ d) $\displaystyle\int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x\,.$

Výsledky

1. a) $\frac{1}{2}\,x^2 + x + \ln\frac{|x-2|^3}{(x+1)^2} + c,\ x \in (-\infty,-1),\ x \in (-1,2),\ x \in (2,+\infty);$

   b) $\frac{1}{2}\ln\frac{|x^2-1|}{(x+2)^2} + c,\ x \in (-\infty,-2),\ x \in (-2,-1),\ x \in (-1,1),\ x \in (1,+\infty);$

   c) $-\frac{3}{(x-1)} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x+2|} + c,\ x \in (-\infty,-2),\ x \in (-2,1),\ x \in (1,+\infty);$

   d) $-\frac{1}{2(x+2)^2} + c,\ x \in (-\infty,-2),\ x \in (-2,+\infty);$

   e) $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c,\ x \in (-\infty,0),\ x \in (0,1),\ x \in (1,+\infty);$

   f) $-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)} - \frac{2}{x-2} + \ln|x-2| + c,\ x \in (-\infty,-1),\ x \in (-1,2),\ x \in (2,+\infty);$

   g) $\frac{5}{3(x+4)^3} + c,\ x \in (-\infty,-4),\ x \in (-4,+\infty);$

   h) $\frac{-3}{4(2x-1)^2} + c,\ x \in (-\infty,\frac{1}{2}),\ x \in (\frac{1}{2},+\infty).$

2. a) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+10) + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + c,\ x \in \mathbb{R};$

   b) $\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+5) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c,\ x \in \mathbb{R};$

   c) $\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+13) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + c,\ x \in \mathbb{R};$

   d) $\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + c,\ x \in \mathbb{R};$

   e) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{2} + c,\ x \in \mathbb{R};$

   f) $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1} + c,\ x \in (-\infty,0),\ x \in (0,+\infty).$

3. (vhodná substituce)

   a) $\frac{1}{2}\ln\frac{|\mathrm{e}^{2x}-1|}{\mathrm{e}^{2x}+2} + c,\ x \in (-\infty,0),\ x \in (0,+\infty)\ (\mathrm{e}^{2x}=t);$

   b) $x - \frac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{3x}+2) + c,\ x \in \mathbb{R}\ (\mathrm{e}^{3x}=t);$

   c) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\mathrm{e}^{2x}-1) + c,\ x \in \mathbb{R}\ (\mathrm{e}^{2x}=t);$

   d) $\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{x} + c,\ x \in \mathbb{R}\ (\mathrm{e}^{x}=t);$

   e) $\frac{1}{2}\ln|\ln^2 x - 4| + c,\ x \in (0,\mathrm{e}^{-2}),\ x \in (\mathrm{e}^{-2},\mathrm{e}^{2}),\ x \in (\mathrm{e}^{2},+\infty)\ (\ln x = t);$

   f) $\ln|\ln 3x| + c,\ x \in (0,\frac{1}{3}),\ x \in (\frac{1}{3},+\infty)\ (\ln 3x = t).$

4. (vhodná substituce)

   a) $\frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + c,\ x \in \mathbb{R}\ (\sin x = t);$

   b) $\frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x + c,\ x \in \mathbb{R}\ (\cos x = t$ nebo $\sin x = t);$

   c) $\frac{1}{3}\ln\frac{2+\sin x}{1-\sin x} + c,\ x \in (-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\ (\sin x = t);$

   d) $\frac{1}{1+\cos x} + c,\ x \in (0+k\pi, \pi+k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\ (\cos x = t).$

9. Určitý integrál

1. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^2 (3x^2-2x)\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$; c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x}$;

d) $\displaystyle\int_2^6 \frac{\mathrm{d}x}{x}$; e) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int_{-7}^0 \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 6x\,\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\tfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int_0^1 3^x\,\mathrm{d}x$.

2. Spočtěte (rozšiřující):

a) $\displaystyle\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_{-2}^3 |x^2-1|\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_2^4 \mathrm{e}^{|2x-6|}\,\mathrm{d}x$.

3. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} (2x+1)\sin\tfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi} (4x-1)\cos 2x\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_{-1}^0 (3x+2)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int_{-1}^0 x^3\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

4. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_{-2}^3 \frac{2x^3-3x^2-20x-14}{x^2-x-12}\,\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x}\,\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int_3^5 \frac{x-2}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$.

5. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x-2\cos x+2}\,\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x\,(\ln^2 x+1)}\,\mathrm{d}x$.

6. Spočtěte (rozšiřující):

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{tg}\tfrac{x}{3}\,\mathrm{d}x$.

Výsledky

1. a) 4; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) $\ln 3$; e) $\frac{14}{3}$; f) -9; g) 0; h) $2\sqrt{2}$; i) $\frac{2}{\ln 3}$ (přepis funkce na $\mathrm{e}^{x \ln 3}$).
2. a) 1; b) $\frac{28}{3}$; c) $\mathrm{e}^2 - 1$.
3. (per partes) a) 10; b) 0; c) $(1 + 2\mathrm{e}^{-3})/3$; d) -2π; e) $2\mathrm{e} - 6$.
4. a) $2 \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $7 \ln 6$; d) $\ln 3 - 1$; e) $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{8}$; f) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.
5. (substituce) a) $\ln \frac{9}{8}$ ($\mathrm{e}^x = t$); b) $\frac{1}{3}$ ($\sin x = t$); c) $-\frac{1}{4}\pi$ ($\cos x = t$); d) $\frac{1}{2} \ln 2$ ($\ln x = t$).
6. (substituce) a) 3 ($x^2 - 1 = t$); b) $\frac{4}{3}$ ($x^3 + 1 = t$); c) $3 \ln 2$ (přepis funkce na $\frac{\sin x/3}{\cos x/3}$, substituce $\cos \frac{x}{3} = t$).

10. Nevlastní integrál

1. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$; b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4}$; c) $\displaystyle\int_{-8}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$;

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3}}$; e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x \,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-4x+5} \,\mathrm{d}x$.

2. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x} \,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4\,\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$.

3. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+3}$; b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+2x+5} \,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-3}$; d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+4}{(x+1)(x^2+3x+2)} \,\mathrm{d}x$.

4. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+4\,\mathrm{e}^x+3}$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}}$;

c) $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(\ln^2 x+2\ln x+5)}$; d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(\ln^2 x+3\ln x+2)}$.

Výsledky

1. a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{3}$; c) -6; d) $+\infty$; e) neexistuje; f) 1; g) neexistuje.
2. (per partes) a) $\frac{1}{2\mathrm{e}}$; b) 1; c) 24.
3. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi$; b) $+\infty$; c) $\frac{1}{4}\ln 5$; d) $3-2\ln 2$.
4. (substituce) a) $\frac{1}{6}\ln 2$ $(\mathrm{e}^x = t)$; b) $\frac{1}{8}\pi$ $(\mathrm{e}^{2x} = t)$; c) $\frac{3}{8}\pi$ $(\ln x = t)$; d) $\ln 2$ $(\ln x = t)$.

11. Aplikace určitého integrálu

(aplikace teorie)

1. Spočtěte střední hodnotu funkce f na daném intervalu:
   a) $f(x) = 3x,\ x \in \langle -1, 1\rangle$;
   b) $f(x) = x^2,\ x \in \langle 0, 1\rangle$;
   c) $f(x) = \mathrm{e}^x,\ x \in \langle 0, 2\rangle$;
   d) $f(x) = \sin x,\ x \in \langle 0, \pi\rangle$.
2. Spočtěte obsahy následujících množin:
   a) $\{[x, y]:\ x \in \langle 0, \pi\rangle,\ 0 \le y \le \sin x\}$ (plocha pod obloukem sinusoidy);
   b) $\{[x, y]:\ x \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle,\ 0 \le y \le 1/x\}$;
   c) $\{[x, y]:\ x \in \langle a, b\rangle,\ 0 \le y \le x^2\}$;
   d) $\{[x, y]:\ x \in \mathbb{R},\ 0 \le y \le \mathrm{e}^{-|x|}\}$;
   e) $\{[x, y]:\ x \in \mathbb{R},\ 0 \le y \le 1/(x^2 + 1)\}$.
3. Spočtěte obsah omezené plochy ohraničené grafy funkcí f, g:
   a) $f(x) = 0,\ g(x) = x^2 - 2x$;
   b) $f(x) = x,\ g(x) = x^4$;
   c) $f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{x}$.
4. Spočtěte délku grafu funkce f na daném intervalu:
   a) $f(x) = \ln(x^2 - 1),\ x \in \langle 2, 5\rangle$;
   b) $f(x) = \ln \sin x,\ x \in \langle \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\rangle$;
5. Spočtěte objem rotačního elipsoidu, vzniklého rotací elipsy s poloosami a, b kolem její osy délky $2a$. (Nápověda: použijte rovnici elipsy $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.)
6. Spočtěte objem rotačního paraboloidu, který má výšku v a poloměr podstavy r.
7. Spočtěte obsah povrchu pláště kulového pásu s výškou v v kouli o poloměru r. (Nápověda: použijte rovnici kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.)

Výsledky

1. a) 0; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^2-1)$; d) $\frac{2}{\pi}$.

2. a) 2; b) 1; c) $(b^3-a^3)/3$; d) 2; e) π.

3. a) $\frac{4}{3}$ (interval $\langle 0,2\rangle$); b) $\frac{3}{10}$ (interval $\langle 0,1\rangle$); c) $\frac{1}{3}$ (interval $\langle 0,1\rangle$).

4. a) $3+\ln 2$; b) $\ln 3$.

5. $\frac{4}{3}\,\pi a b^2$ (a na ose x, b na ose y, $f(x)=b\sqrt{1-(x/a)^2}$ na $\langle -a,a\rangle$).

6. $\frac{1}{2}\,\pi r^2 v$ (parabola s osou x a vrcholem v počátku má rovnici $x=cy^2$, pro výšku v a poloměr podstavy r prochází bodem $[v,r]$, dosazením do rovnice $c=r/\sqrt{v}$, funkce $f(x)=r\sqrt{x/v}$ na $\langle 0,v\rangle$).

7. $2\pi r(b-a)=2\pi r v$ (koule se středem v počátku, pás rovinami $x=a$, $x=b$, $-r\le a<b\le r$, funkce $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ na $\langle a,b\rangle$; nezávisí na poloze v kouli).

12. Číselné řady

1. Určete součet geometrické řady:

a) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots$;

b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \cdots$;

c) $3 + 4 + \frac{16}{3} + \frac{64}{9} + \cdots$;

d) $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \cdots$.

2. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$;

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+3}$;

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$;

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$;

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$;

f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^7}{2^k}$;

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k!}$;

h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{8^k}$;

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$;

j) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3-k}{k}\right)^{k^2}$;

k) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-4k-5}$;

l) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{3k-7}$;

m) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-k}{k+2}\right)^{k}$;

n) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{3k+1}}{(k-1)!}$;

o) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^k}{(k+1)!}$ (rozšiřující) .

Výsledky

1. a) 3 (kvocient $\frac{2}{3}$);

   b) $\frac{1}{4}$ (kvocient $-\frac{1}{3}$);

   c) $+\infty$ (kvocient $\frac{4}{3} \geq 1$).

   d) osciluje (kvocient $-\frac{3}{2} \leq -1$).

2. a) konverguje (Leibnizovo kr.), ne absolutně (integrální kr.);

   b) konverguje (Leibnizovo kr.), ne absolutně (integrální kr.);

   c) nekonverguje (integrální kr.);

   d) absolutně (integrální kr.);

   e) absolutně (podílové/odmocninové kr.);

   f) absolutně (podílové/odmocninové kr.);

   g) absolutně (podílové/odmocninové kr.);

   h) nekonverguje (nutná podmínka konvergence nebo odmocninové/podílové kr.);

   i) absolutně (podílové kr.: $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{x\to+\infty} \exp \frac{\ln\frac{x}{x+1}}{1/x} \overset{\mathrm{l'H}}{=} \mathrm{e}^{-1} < 1$);

   j) absolutně (odmocninové kr.: $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{3-k}{k}\right|^k = \lim_{x\to+\infty} \exp \frac{\ln\frac{x-3}{x}}{1/x} \overset{\mathrm{l'H}}{=} \mathrm{e}^{-3} < 1$);

   k) absolutně (integrální kr. od $k = 2$);

   l) konverguje (Leibnizovo kr. od $k = 3$), ne absolutně (integrální kr. od $k = 3$);

   m) nekonverguje (neplatí nutná podmínka konvergence:
   $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{-k}{k+2}\right|^k = \lim_{x\to+\infty} \exp \frac{\ln\frac{x}{x+2}}{1/x} \overset{\mathrm{l'H}}{=} \mathrm{e}^{-2} \neq 0$).

   n) absolutně (podílové kr.)

   o) nekonverguje (neplatí nutná podmínka konvergence:
   $\lim_{k\to\infty} \frac{|(-k)^k|}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{2}\cdot\frac{k}{3}\cdots\frac{k}{k}\cdot\frac{k}{k+1}\right) \geq \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{2}\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{k}{k+1}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{2+2/k} =$
   $= +\infty$).